

Contributions au traitement des conditions limites et d'interface dans le cadre de la Méthode des Eléments Finis

Franz Chouly

La Méthode des Eléments Finis (MEF) permet de résoudre numériquement certaines équations aux dérivées partielles qui proviennent de la mécanique des solides et des fluides, ou d'autres champs applicatifs. Elle a connu un essor considérable depuis son origine dans les années 1950, et fait encore maintenant l'objet de très nombreuses études. Nous nous focaliserons essentiellement dans cet exposé sur les techniques qui permettent la prise en compte de conditions aux limites et d'interface complexes, par exemple en interaction fluide-structure ou pour les contacts et les frottements en élasticité.

Nous présenterons en particulier une technique alternative à celles traditionnelles (dualité et pénalisation), originellement proposée par J. Nitsche en 1971 pour le traitement des conditions aux limites de Dirichlet non-homogènes, et remise au goût du jour par R. Stenberg et ses collaborateurs à partir du milieu des années 1990. La méthode de Nitsche a pour avantage de rester primale (aucune inconnue supplémentaire n'est introduite) tout en préservant la consistance (contrairement à la pénalisation).

Nous montrerons qu'elle peut s'étendre à divers problèmes, tout en conservant les avantages mentionnés ci-dessus. Dans le cas, par exemple, des conditions de contact sans frottement en élasticité linéarisée, une condition aux limites fortement non-linéaire apparaît sur le bord de contact. Nous verrons alors qu'il est possible d'écrire une formulation de type Nitsche qui traduit cette condition. Nous parvenons, d'une part, à démontrer, sous conditions, le caractère bien posé du problème discrétisé, non-linéaire, et, d'autre part, la convergence optimale de la méthode, en deux et trois dimensions. Cette dernière propriété de convergence optimale est en général difficile à obtenir pour les autres méthodes, et il faut souvent avoir recours à des hypothèses techniques, par exemple sur la topologie de la zone de contact effective. De telles hypothèses ne sont pas nécessaires pour la méthode de Nitsche. Nous avons de plus réalisé des expériences numériques qui valident l'analyse théorique et montrent l'intérêt potentiel de la méthode pour la simulation numérique en mécanique des solides.

Citons également comme autres applications l'interaction entre une structure élastique et un fluide visqueux incompressible, où un traitement de la condition d'interface inspiré par Nitsche permet d'améliorer la stabilité de certains schémas en temps sans dégrader leur performance. Aussi, si l'on souhaite mettre en oeuvre une méthode de décomposition de domaine avec maillages non-conformes, la méthode de Nitsche peut s'avérer une alternative viable à la méthode des joints, y compris dans le cas des équations intégrales de frontière, où l'application de telles techniques est plus récente. On arrive en particulier ici à montrer une convergence presque quasi-optimale malgré la faible régularité des solutions.

Finalement, nous évoquerons quelques autres contributions en modélisation et calcul scientifique, qui ont trait à la mécanique des fluides ou à l'interaction fluide-structure.