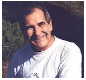
Une petite présentation sur la modélisation mathématique pour l'environnement

Boris Andreianov,
Université de Franche-Comté, Besançon

L'exposé utilise les résultats, images et videos obtenus par
Jacques Rappaz, Marco Picasso, Guillaume Jouvet (Lausanne), Martin Funk (Zürich),
Sylvia Serfaty, Laure Saint-Raymond (Paris), Eduard Feireisl (Prague),
Noureddine Igbida (Limoges), Leonid Prigozhin (Negev, Israel) et John Barrett (Oxford)

Lycée Jean Michel — Lons le Saunier, février 2013

Pourquoi fait-on des modèles ?

Un des objectifs de la science est de décrire puis expliquer des phénomènes naturels.

- comment se forme, se déplace, et fond un glacier ?
- pourquoi, lorsqu'il pleut sur la montagne, l'eau des pluies (ainsi que celle des glaciers) emprunte tel chemin ou tel autre ? Pourquoi elle s'accumule dans un tel lac plutôt qu'ailleurs ? Pourquoi certains lacs et rivières se dessèchent et d'autres, débordent ?
- pourquoi une dune dans le désert a la forme d'un croissant ? A quelle vitesse elle se déplace en fonction du vent et du rélief ?
- comment fait le poisson pour nager ?
- ...

Pourquoi fait-on des modèles ?

L'objectif suivant peut être

- prédire le comportement (du glacier, d'une rivière, d'une dune...)
- influencer ce comportement
  (par exemple, construire un barrage à l'endroit bien choisi...)
- s'inspirer d'un phénomène “vu dans la nature”
  (par exemple, construire un sous-marin
  qui se déplace “en se tortillant”, comme un poisson...
  il faut noter qu'un poisson ne fait que très peu de bruit
  et il dépense beaucoup moins d'énergie qu'un sous-marin !)

Exemple d'étude d'un phénomène naturel :

évolution dans le temps du Glacier du Rhône
et du glacier “Aletschgletscher”:
Page personnelle de M. Guillaume Jouvet
(Licence et Master à Besançon, thèse à Lausanne)

Le passé d'un glacier... il y a 20000 ans (l'Age de Glace !)

Le passé d'un glacier... photo de l'année 1850

Le passé d'un glacier... photo de l'année 1900

Le passé d'un glacier... photo de l'année 1914

Le passé d'un glacier... photo de l'année 1925

Le passé d'un glacier... photo de l'année 1985

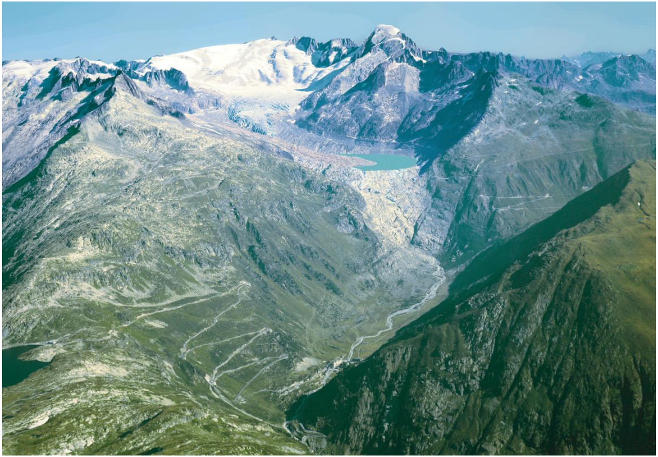
Que veut-on savoir du glacier ?

On se pose des questions telles que :

- expliquer les variations temporelles du glacier, les relier aux variations climatiques
- le glacier va-t-il disparaître (réchauffement climatique) ?
- à l'inverse, quelle est l'influence du glacier du Rhône sur le climat local ?
- expliquer et prédire le glissement d'un glacier, sa croissance ou fonte
- prédire le débit d'eau dans le Rhône selon la superficie et la position du glacier
- ...

Que veut-on savoir du glacier ? Une prédiction pour l'an 2050

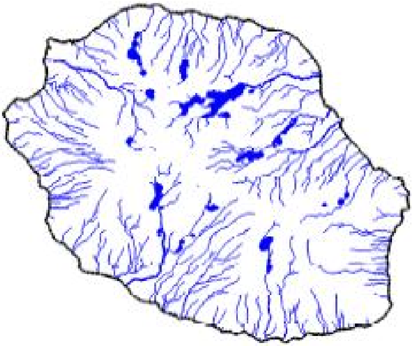
Voici l'exemple d'une prédiction :



Comment est-ce qu'on a obtenu cette prédiction ?
Quelle confiance peut-on lui accorder ?

Où sont les lacs et les rivières ? Une prédiction pour la Réunion

Et voici une autre prédiction :
une carte des ruisseaux, rivières et lacs tiré du rélief donné...
qui est celui de l'Ile de la Réunion !



Mais pourquoi calculer et chercher à prédire quelque chose
qui peut tout simplement être observé ?

Pourquoi des modèles mathématiques ?

Revenons aux questions qu'on s'était posées au départ (glacier, lacs et rivières, dunes, poisson qui nage...).

Elles relèvent des domaines scientifiques à part entière... en principe, on ne voit pas pourquoi les maths seraient utiles pour y répondre. Souvent, on privilégie des expériences (délicates et coûteuses).

En effet, chaque science dispose des concepts et façons de penser qui lui sont propres, et qui permettent de donner des réponses intéressantes aux diverses questions posées.

Pourquoi des modèles mathématiques ?

Revenons aux questions qu'on s'était posées au départ (glacier, lacs et rivières, dunes, poisson qui nage...).

Elles relèvent des domaines scientifiques à part entière... en principe, on ne voit pas pourquoi les maths seraient utiles pour y répondre. Souvent, on privilégie des expériences (délicates et coûteuses).

En effet, chaque science dispose des concepts et façons de penser qui lui sont propres, et qui permettent de donner des réponses intéressantes aux diverses questions posées.

Mais assez souvent, on aboutit à une réponse purement qualitative :

- le glacier en question va régresser (réchauffement climatique !)
- l'eau des pluies des montagnes va suivre, de préference, le chemin qui a la pente la plus inclinée
- le poisson se propulse grâce aux tourbillons qu'il crée dans l'eau en se tortillant...

Seulement, on a souvent envie d'avoir des prédictions plus précises ! Et de plus, l'expérimentation coûte cher et elle est parfois impossible.

Pourquoi des modèles mathématiques ?

On souhaite dans beaucoup de cas avoir une réponse quantitative :

- “de combien” se déplacera la dune en une année, étant donné la force moyenne du vent ?
- Combien de temps survivrait tel ou tel glacier dans les conditions climatiques actuelles ?
- Quel débit d'eau aura telle rivière, à pluviométrie donnée ?

Exemple : trois prédictions pour un autre glacier suisse :

(cliquer sur les liens pour voir les videos)

- cas d'un réchauffement de 2 degrés au cours du XXI siècle
- cas d'un siecle très froid (comme en 1978, une année bien fraîche)
- cas d'une prédiction climatique “moyenne”

Dans les trois cas on n'a pas seulement une prédiction qualitative (fonte/croissance du glacier), mais un calcul très fin permettant de visualiser la masse, l'étendue, la localisation du glacier.

Il a fallu beaucoup de maths
pour faire et surtout pour concevoir ces calculs !

Comment on fait des modèles mathématiques ?

Naturellement, les maths interviennent toujours, au moins un peu, pour répondre à la question "combien". Dans des cas très simples, il y a une formule (par exemple, on peut calculer la poussée d'Archimède avec quelques paramètres faciles à mesurer...)

Mais des situations réelles portent sur beaucoup de valeurs très diverses (comme, par exemple, les prédictions météorologiques : il faut tenir compte des vents, de l'humidité, de la température, de la quantité d'énergie transmise par le soleil, du rélief, . . .).

Comment on fait des modèles mathématiques ?

Naturellement, les maths interviennent toujours, au moins un peu, pour répondre à la question "combien". Dans des cas très simples, il y a une formule (par exemple, on peut calculer la poussée d'Archimède avec quelques paramètres faciles à mesurer...)

Mais des situations réelles portent sur beaucoup de valeurs très diverses (comme, par exemple, les prédictions météorologiques : il faut tenir compte des vents, de l'humidité, de la température, de la quantité d'énergie transmise par le soleil, du rélief, . . .).

Pour espérer avoir de la précision, "on compte tout".

À chaque quantité intéressante, on assigne une valeur (un nombre) qui peut varier en temps et en espace. On les désigne par des lettres: x, y, z... u, v, w... α, β, γ, voire $\widehat{\mathfrak{T}}$, $\Theta_{\rho}^{[\cdot]}$ et $\xi_{\tilde{\pi}^*}^{n,\mathcal{D}}$!

Toutes les valeurs ne jouent pas le même rôle.

Certains (les paramètres) doivent être observés avant tout calcul. D'autres (les inconnues) seront déterminées à l'issue du calcul.

Exemple : dans l'équation $ax^2 + bx + c = 0$,
les paramètres sont a, b et c, tandis que x est l'inconnue.

Comment on fait des modèles mathématiques ?

Pour mettre en place un modèle, il faut plusieurs étapes :
le mathématicien est ici au service du spécialiste de modélisation :

- désigner les quantités intéressantes
  (les inconnues, les paramètres)
- comprendre et décrire le mécanisme derrière le phénomène
- mettre tout ceci en équations : on obtient un premier modèle
  (autant d'équations que d'inconnues)
- analyser ces équations afin de répérer des incohérences,
  mettre en place un algorithme de résolution,...
- donner des valeurs aux paramètres
  (grâce aux observations ou en utilisant d'autres modèles)
- chercher des solutions (approchées) à ces équations :
  parfois avec des formules, le plus souvent, avec l'ordinateur
  (il faut alors mettre en place un bon algorithme de calcul)
- confronter les solutions obtenues aux observations passées...
  éventuellement, ajuster le modèle càd le rendre plus précis.

Alors, on pourra (vraiment ?) “prédire” le futur !

Quelle confiance on peut accorder au modèle ?

Hélas, le modèle ainsi obtenu sera toujours... un peu faux !

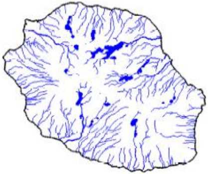
En effet, on trouvera toujours des conditions dans lesquelles les mécanismes pris en compte sont insuffisants, les approximations sont grossières, les valeurs des paramètres mal observés...

Quelle confiance on peut accorder au modèle ?

Hélas, le modèle ainsi obtenu sera toujours... un peu faux !

En effet, on trouvera toujours des conditions dans lesquelles les mécanismes pris en compte sont insuffisants, les approximations sont grossières, les valeurs des paramètres mal observés...

Toutefois il y a différentes façons d'être inexact...



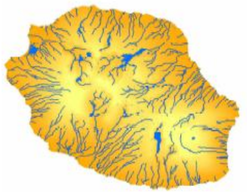


Figure: (a) la prédiction pour la Réunion (b) l'observation sur le terrain

Ici, il y a une bonne concordance entre la prédiction et le réel.

Morale : tous les modèles sont faux, mais certains sont utiles.

Un exemple de modèle (mécanique des fluides, météorologie)

Voici (en plusieurs slides) un modèle mathématique.
D'abord, les quantités à relier : paramètres, inconnues.

Model description

STATE VARIABLES:

Mass density

$$\varrho = \varrho(t, x)$$

Absolute temperature

$$\vartheta = \vartheta(t, x)$$

Velocity field

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}(t, x)$$

THERMODYNAMIC FUNCTIONS:

Pressure

$$p = p(\varrho, \vartheta)$$

Internal energy

$$e = e(\varrho, \vartheta)$$

Entropy

$$s = s(\varrho, \vartheta)$$

Gibbs' law

$$\vartheta D s(\varrho, \vartheta) = D e(\varrho, \vartheta) + p(\varrho, \vartheta) D \left(\frac{1}{\varrho} \right)$$

Thermodynamic stability

$$\frac{\partial p(\varrho, \vartheta)}{\partial \varrho} > 0, \quad \frac{\partial e(\varrho, \vartheta)}{\partial \vartheta} = c_v(\varrho, \vartheta) > 0$$

Un exemple de modèle (mécanique des fluides, météorologie)

Ensuite, les premières équations réliant ces quantités.
Ces équations expriment des lois physiques "statiques".

Newton's law

$$\mathbb{S} = \mathbb{S}(\vartheta, \nabla_x \mathbf{u}) = \mu(\vartheta)\left(\nabla_x \mathbf{u} + \nabla_x^t \mathbf{u} - \frac{2}{3}\mathrm{div}_x \mathbf{u}\mathbb{I}\right) + \eta(\vartheta)\mathrm{div}_x \mathbf{u}\mathbb{I}$$

Fourier's law

$$\mathbf{q} = \mathbf{q}(\vartheta, \nabla_x \vartheta) = -\kappa(\vartheta)\nabla_x \vartheta$$

Pressure

$$p(\varrho, \vartheta) = \vartheta^{5/2} P\left(\frac{\varrho}{\vartheta^{3/2}}\right) + \frac{a}{3}\vartheta^4 \ , \quad a > 0$$

$$\lim_{Y \to \infty} \frac{P(Y)}{Y^{5/3}} = p_\infty > 0$$

Internal energy

$$e(\varrho, \vartheta) = \frac{3}{2}\vartheta\left(\frac{\vartheta^{3/2}}{\varrho}\right) P\left(\frac{\varrho}{\vartheta^{3/2}}\right) + \frac{a}{\varrho}\vartheta^4 \ , \quad a > 0$$

Un exemple de modèle (mécanique des fluides, météorologie)

Ensuite, les autres équations (différentielles)
qui expriment des lois physiques “dynamiques”:

Equation of continuity

$$\partial_t \varrho + \mathrm{div}_x(\varrho \mathbf{u}) = 0$$

Momentum balance

$$\partial_t(\varrho \mathbf{u}) + \mathrm{div}_x(\varrho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + \nabla_x p(\varrho, \vartheta) = \mathrm{div}_x \mathbb{S} + \varrho \nabla_x F$$

Thermal energy equation

$$\varrho c_v(\varrho, \vartheta)\left(\partial_t \vartheta + \mathbf{u} \cdot \nabla_x \vartheta\right) + \mathrm{div}_x \mathbf{q} = \mathbb{S} : \nabla_x \mathbf{u} - \vartheta \frac{\partial p(\varrho, \vartheta)}{\partial \vartheta} \mathrm{div}_x \mathbf{u}$$

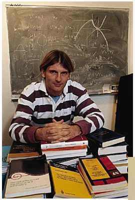
Entropy equation

$$\partial_t(\varrho s(\varrho, \vartheta)) + \mathrm{div}_x(\varrho s(\varrho, \vartheta)\mathbf{u}) + \mathrm{div}_x \left(\frac{\mathbf{q}}{\vartheta}\right) = \sigma$$

$$\sigma \boxed{\geq} \frac{1}{\vartheta}\left(\mathbb{S} : \nabla_x \mathbf{u} - \frac{\mathbf{q} \cdot \nabla_x \vartheta}{\vartheta}\right)$$

Un exemple de modèle (mécanique des fluides, météorologie)

Et il en reste encore !



Energy balance formulation

Total energy

$$\partial_t\left(\frac{1}{2}\varrho|\mathbf{u}|^2+\varrho e(\varrho,\vartheta)-\varrho F\right)$$

$$+\mathrm{div}_x\left[\left(\frac{1}{2}\varrho|\mathbf{u}|^2+\varrho e+p-\varrho F\right)\mathbf{u}\right]+\mathrm{div}_x\mathbf{q}-\mathrm{div}_x\left(\mathbb{S}\mathbf{u}\right)=0$$

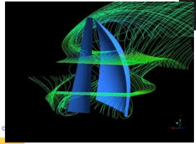
Thermal energy

$$\varrho c_v(\varrho,\vartheta)\left(\partial_t\vartheta+\mathbf{u}\cdot\nabla_x\vartheta\right)+\mathrm{div}_x\mathbf{q}=\mathbb{S}:\nabla_x\mathbf{u}-\vartheta\frac{\partial p(\varrho,\vartheta)}{\partial\vartheta}\mathrm{div}_x\mathbf{u}$$

Entropy

$$\partial_t(\varrho s(\varrho,\vartheta))+\mathrm{div}_x(\varrho s(\varrho,\vartheta)\mathbf{u})+\mathrm{div}_x\left(\frac{\mathbf{q}}{\vartheta}\right)$$

$$=\boxed{\frac{1}{\vartheta}\left(\mathbb{S}:\nabla_x\mathbf{u}-\frac{\mathbf{q}\cdot\nabla_x\vartheta}{\vartheta}\right)}$$



L'ensemble de ces équations fait un modèle parmi les plus complexes qu'on ait jamais réussi à bien étudier d'un point de vue théorique (théorèmes datant de 1990-2012 : France, Rép. Tchèque,...)

Qu'est-ce qu'un peut vraiment calculer ?

Alors un modèle mathématique, ça fait parfois beaucoup d'équations ! Pour la méteo, qu'on vient de voir : il faut quelques pages pour les écrire toutes, et quelques années d'études en amont...

Il n'est pas envisageable de résoudre ces équations précisement, alors on cherche des solutions “approchées” à l'aide des calculs très lourds - mais très basiques - sur l'ordinateur.
On obtient ainsi deux modèles :

- l'un, “théorique”, avec toutes les équations
- l'autre, sa variante “numérique”,
  qui est un algorithme à faire tourner sur l'ordinateur.

Qu'est-ce qu'un peut vraiment calculer ?

Alors un modèle mathématique, ça fait parfois beaucoup d'équations ! Pour la méteo, qu'on vient de voir : il faut quelques pages pour les écrire toutes, et quelques années d'études en amont...

Il n'est pas envisageable de résoudre ces équations précisement, alors on cherche des solutions "approchées" à l'aide des calculs très lourds - mais très basiques - sur l'ordinateur.
On obtient ainsi deux modèles :

- l'un, "théorique", avec toutes les équations
- l'autre, sa variante "numérique",
  qui est un algorithme à faire tourner sur l'ordinateur.

Travail d'un mathématicien : vérifier que les deux sont proches (càd l'algorithme calcule quelque chose qui ressemble la solution théorique... hic, la solution théorique est inconnue, d'où la difficulté !).

Travail d'un modélisateur : confronter ces calculs à la réalité (ceci peut confirmer ou infirmer le modèle)

Hiérarchie :
phénomène observé $\longrightarrow$ modèle théorique $\longrightarrow$ modèle numérique

Exemple de comparaison entre calcul numérique et observations

Voici l'état du glacier du Rhône en 1900.

Figure: (a) Photo des archives (b) "Prédiction" faite avec le modèle

Exemple de comparaison entre calcul numérique et observations

... en 1932...

Figure: (a) Photo des archives (b) “Prédiction” faite avec le modèle

Exemple de comparaison entre calcul numérique et observations

... en 1960...

Figure: (a) Photo des archives (b) "Prédiction" faite avec le modèle

Exemple de comparaison entre calcul numérique et observations

... en 1985.

Figure: (a) Photo des archives (b) "Prédiction" faite avec le modèle

Passons aux prédictions ?

La ressemblance vous paraît convaincante ?

Alors, on peut utiliser le modèle pour les vraies prédictions !

On s'informe auprès des collègues qui, de leur côté, modélisent le climat. Ils offrent plusieurs scénarios possibles, qui fournissent les paramètres pour le modèle du glacier.

Voici un des cas, qui correspond au "scenario climatique moyen".

Passons aux prédictions !

On peut faire tourner l'algorithme numérique et afficher des solutions.

- Glaciers : les simulations et prédictions que nous avons vues. Ces résultats sont tirés du travail de thèse de Guillaume Jouvet (ex-étudiant bisontin, originaire de la Franche-Comté, actuellement chercheur post-doctorant à Berlin).

Passons aux prédictions !

On peut faire tourner l'algorithme numérique et afficher des solutions.

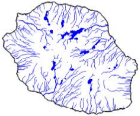
- Glaciers : les simulations et prédictions que nous avons vues. Ces résultats sont tirés du travail de thèse de Guillaume Jouvet (ex-étudiant bisontin, originaire de la Franche-Comté, actuellement chercheur post-doctorant à Berlin).
- Dunes et tas de sable :
  les vidéos suivantes montrent comment grandit un tas de sable sur une table carrée lorsque l'on verse du sable par-dessus ; comment s'effondre le sable qui formait un tas "instable".

(Cliquer pour voir) (Cliquer pour voir) (Cliquer pour voir)

Figure: (a) source ponctuelle (b) source tournante (c) château de sable

Le modèle qui en cache un autre

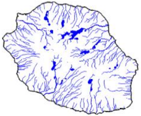
- (dunes et tas de sable) Les calculs pour obtenir les videos des tas de sable ont été conçus par Noureddine Igbida, professeur à Limoges, anciennement doctorant à Besançon en 1994-97.

- 

  Étonnant :
  la “carte” des lacs et rivières (La Réunion) a été obtenue par un algorithme très semblable conçu, au départ, pour les tas de sable !

Le modèle qui en cache un autre

- (dunes et tas de sable) Les calculs pour obtenir les videos des tas de sable ont été conçus par Noureddine Igbida, professeur à Limoges, anciennement doctorant à Besançon en 1994-97.

- 

  Étonnant :
  la "carte" des lacs et rivières (La Réunion) a été obtenue par un algorithme très semblable conçu, au départ, pour les tas de sable !

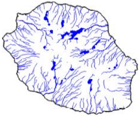
Idée : le sable amassé en tas a une "pente de stabilité", au-delà de laquelle le tas s'effondre (le video du château de sable).

Si on prend cette pente de stabilité très petite, avec le modèle pour le sable on imite le comportement d'un liquide (eau).

Le facteur majeur à prendre en compte : le rélief (La Réunion !)

Le modèle qui en cache un autre

- (dunes et tas de sable) Les calculs pour obtenir les videos des tas de sable ont été conçus par Noureddine Igbida, professeur à Limoges, anciennement doctorant à Besançon en 1994-97.

- 

  Étonnant :
  la “carte” des lacs et rivières (La Réunion) a été obtenue par un algorithme très semblable conçu, au départ, pour les tas de sable !

  Idée : le sable amassé en tas a une “pente de stabilité”, au-delà de laquelle le tas s'effondre (le video du château de sable).
  Si on prend cette pente de stabilité très petite, avec le modèle pour le sable on imite le comportement d'un liquide (eau).
  Le facteur majeur à prendre en compte : le rélief (La Réunion !)

Hélas, les outils mathématiques utilisés pour le cas de tas de sable sur une table plate ne sont plus appropriés sur un terrain à rélief.
On ne sait pas encore si ce modèle “lacs et rivières” est cohérent
$\Rightarrow$ projet de recherche “Lien dunes / lacs et rivières” déposé en 2013
(N. Igbida + une vingtaine de chercheurs dont deux bisontins)

Quelques questions essentielles qui nous occupent

- Le modèle “mathématique” est-il cohérent ?
  Par exemple, existe-t-il une solution ? est-elle unique ?
  comment elle se comporte dans des situations typiques ?
  et dans des situations extrêmes ? quelles sont les limites du modèle ?
  Lorsque l'on néglige certains paramètres,
  est-ce qu'on tombe sur un autre modèle plus simple ?
  Ces questions requierent le travail d'un mathématicien (“analyste”).

Quelques questions essentielles qui nous occupent

- Le modèle “mathématique” est-il cohérent ?
  Par exemple, existe-t-il une solution ? est-elle unique ?
  comment elle se comporte dans des situations typiques ?
  et dans des situations extrêmes ? quelles sont les limites du modèle ?
  Lorsque l'on néglige certains paramètres,
  est-ce qu'on tombe sur un autre modèle plus simple ?
  Ces questions requierent le travail d'un mathématicien (“analyste”).
- Comment déduire le modèle numérique du modèle théorique ?
  Est-ce que les solutions approchées calculées par ordinateur
  sont proches des solutions “mathématiques” ? quel serait l'écart ?
  Comment optimiser la précision et la vitesse des calculs ?
  Pour ces questions, il faut un autre mathématicien (“numéricien”),
  avec des compétences assez différentes de son collègue analyste.

Quelques questions essentielles qui nous occupent

- Le modèle “mathématique” est-il cohérent ?
  Par exemple, existe-t-il une solution ? est-elle unique ?
  comment elle se comporte dans des situations typiques ?
  et dans des situations extrêmes ? quelles sont les limites du modèle ?
  Lorsque l'on néglige certains paramètres,
  est-ce qu'on tombe sur un autre modèle plus simple ?
  Ces questions requierent le travail d'un mathématicien (“analyste”).
- Comment déduire le modèle numérique du modèle théorique ?
  Est-ce que les solutions approchées calculées par ordinateur
  sont proches des solutions “mathématiques” ? quel serait l'écart ?
  Comment optimiser la précision et la vitesse des calculs ?
  Pour ces questions, il faut un autre mathématicien (“numéricien”),
  avec des compétences assez différentes de son collègue analyste.
- les deux modèles, mathématique et numérique, correspondent-ils
  bien ou pas bien au phénomène naturel qu'on espérait décrire ?
  Par exemple, quelle est la signification physique/biologique/...
  du comportement typique que le modèle prédit pour les solutions ?
  Les quantités prédites par les équations sont-elles raisonnables ?
  Ce sont des questions pour le scientifique qui modélise ;
  il utilise le travail des mathématiciens pour valider/ajuster son modèle.

Exemple : modèle numérique pour les lacs et rivières

Au lycée, il ne faut pas espérer comprendre ces équations...

Discrete mixed formulation

Find $w^n \in W_0^h$ *and* $\boldsymbol{q}^n \in V^h$ *such that*

$$\left(\frac{w^n - w^{n-1}}{\tau^n} - f^n, \phi\right) - \langle \nabla\phi, \boldsymbol{q}^n\rangle = 0 \quad \forall\phi \in W_0^h,$$

$$\langle M_\varepsilon^h(w^n), |\psi| - |\boldsymbol{q}^n|\rangle + \langle \nabla w^n, \psi - \boldsymbol{q}^n\rangle \geq 0 \quad \forall\psi \in V^h$$

The discrete mixed formulation can be re-written as

$$s_j \frac{w_j^n - w_j^{n-1}}{\tau^n} + \sum_{e_{j,k}\in\mathcal{E}^h} q_{e_{j,k}}^n - \sum_{e_{k,j}\in\mathcal{E}^h} q_{e_{k,j}}^n = \widetilde{f}_j^n,$$

$$|e_{k,l}| M_{k,l}^n(|\psi| - |q_{e_{k,l}}^n|) + (w_l^n - w_k^n)(\psi - q_{e_{k,l}}^n) \geq 0 \quad \forall\psi \in \mathbb{R}^1$$

for every internal node v_j and any edge $e_{k,l}$.

Here $s_j = \int_{\Omega^h} \chi_j$ and $\widetilde{f}_j^n = \int_{\Omega^h} f^n \chi_j$, where $\chi_j \in W_0^h$ is the basis function associated with the node v_j : $\chi_j(v_k) = \delta_{j,k}$

FBP 2012 – p. 12

mais c'est tout à fait possible avec un bac+5 en maths !

Petit exemple d'analyse d'un modèle (supraconductivité)

Calculs et **raisonnements** menés afin d'"analyser" les équations et arriver à des **résultats** (affirmations concernant les solutions):

The idea is to understand the next order behavior by splitting w_n, writing

$$\nu_n := \sum_{i=1}^{n} \delta_{x_i}$$

as $n\mu_0 + (\nu_n - n\mu_0)$.

$$w_n(x_1,\cdots,x_n) = \iint_{\triangle^c} -\log|x-y|\, d\underbrace{\nu_n(x)}_{n\mu_0+(\nu_n-n\mu_0)}\, d\underbrace{\nu_n(y)}_{n\mu_0+(\nu_n-n\mu_0)} + \int V(x)\, d\underbrace{\nu_n(x)}_{}\,.$$

In rescaled coordinates $x' = \sqrt{n}(x - x_0)$ this becomes

$$\boxed{w_n(x_1,\cdots,x_n) = n^2\mathcal{F}(\mu_0) - n\log\sqrt{n} + \frac{1}{\pi}W(\nabla H_n', \mathbb{1}_{\mathbb{R}^2}) + 2n\sum_{i=1}^{n}\zeta(x_i)}$$

where H_n' is the solution to

$$H_n'(x') = -2\pi\Delta^{-1}\left(\sum_{i=1}^{n}\delta_{x_i'} - \mu_0\left(x_0 + \frac{x'}{\sqrt{n}}\right)\right)$$

(extraits de l'exposé de la française Sylvia Serfaty au Congrès Europeen de Mathématiques en Pologne, été 2012)

Exemple d'un résultat mathématique (océanographie)

Et pour finir... un **résultat** récent (Laure Saint-Raymond, 2002)

Théorème 1.1. *Soit $T > 0$ et $U_0 \in L^2 \cap L^\infty(\mathbb{R}^d)$ un champ de vecteurs à divergence nulle. Soit (g_ε^0) une famille bornée dans $L^2(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d, \mathrm{d}x\, M(v)\,\mathrm{d}v)$ et telle que*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \forall (x,v), \quad 1 + \varepsilon g_\varepsilon^0 \geqslant 0,$$

$$H_\varepsilon\big(M(1+\varepsilon g_\varepsilon^0)/M_\varepsilon^0\big) \to 0 \quad \textit{quand } \varepsilon \to 0,$$

où M_ε^0 désigne la maxwellienne locale de densité 1, de vitesse moyenne εU_0 et de température 1. On considère une famille de solutions (f_ε) du système

$$(\mathrm{BGK}_\varepsilon) \quad \begin{cases} \varepsilon \partial_t f + v.\nabla_x f = \dfrac{1}{\varepsilon^q}(M_f - f), \\ M_f \textit{ maxwellienne locale de mêmes moments que } f \textit{ définie par } (0), \\ f(0,x,v) = M\big(1 + \varepsilon g_\varepsilon^0(x,v)\big). \end{cases}$$

Alors, à extraction d'une suite $\varepsilon_n \to 0$ près, la composante à divergence nulle de la vitesse moyenne $\varepsilon^{-1}\int f_\varepsilon v\,\mathrm{d}v$ converge dans $C^0([0,T], \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d))$ vers une solution dissipative [12] *des équations d'Euler des fluides incompressibles*

$$(\mathrm{E}) \quad \begin{cases} \partial_t U + P(U.\nabla_x U) = 0, \\ U(0,x) = U_0(x), \end{cases}$$

où P est le projecteur de Leray sur les champs à divergence nulle. En particulier, si U_0 est régulière et $d = 2$ (ou $d = 3$ et T suffisamment petit), la famille entière converge vers l'unique solution régulière des équations d'Euler des fluides incompressibles ayant U_0 pour donnée initiale.

Laure Saint-Raymond (Paris) explique les problèmes d'océanographie

Isabelle Gallagher (Paris) explique l'apport des mathématiques pour ces problèmes

Merci !

Merci
pour votre attention...

Merci !

Merci
pour votre attention...

et bon courage pour vos études !