

# METTRE DE L'ORDRE DANS LES REPRÉSENTATIONS D'UN GROUPE, OUI MAIS LEQUEL ?

## 1. Introduction

La théorie des représentations est une composante de l'algèbre : on y étudie les groupes. Elle fait partie des branches des mathématiques qui n'ont pas d'applications directes dans la vie de tous les jours et qui peuvent donc paraître très abstraites. D'où la difficulté à la vulgariser... On peut malgré tout trouver des applications de cette théorie à la physique puisque les groupes tiennent une place très importante en mécanique quantique. Le travail des mathématiciens qui se sont intéressés à la théorie des groupes a donc permis à cette science de se développer. De plus, la théorie des représentations des groupes finis intervient dans le domaine de la chimie organique.

On a souvent du mal à se représenter le travail quotidien d'un algébriste. Quand on se présente comme un doctorant en algèbre on a souvent affaire à une question du genre « En quoi consiste la recherche en maths ? » ou « Qu'est-ce qu'il reste encore à démontrer ? ». Un mathématicien ne fait pas d'expériences comme on peut se les représenter en physique-chimie ou en biologie mais il expérimente d'une autre manière. Il se pose d'abord une question générale comme, par exemple, « Peut-on généraliser ce résultat à d'autres objets ? » puis il travaille sur des exemples afin de mieux comprendre les enjeux. Et si ce qu'il pense est vérifié dans plusieurs cas, alors il essaye de le démontrer. Il passe donc la majeure partie de son temps à travailler avec du papier et un crayon mais fait parfois appel à des logiciels algébriques comme Magma ou Gap quand les calculs demandent trop de temps.

L'algèbre n'est pas la seule composante des mathématiques qui intervient dans notre travail puisque nous utilisons aussi des résultats de géométrie algébrique. Ce n'est pas la géométrie comme on la voit au collège-lycée mais dans certains cas simples, on peut s'appuyer sur des dessins pour nous aider à raisonner. Pour faciliter la compréhension, on illustrera la dernière partie avec des figures pour un exemple particulier : le groupe à deux éléments. Cela peut paraître simpliste au premier abord mais les calculs dans ce cas sont déjà très compliqués.

Première question essentielle pour comprendre notre travail : qu'est-ce qu'un groupe ? C'est un ensemble qui vérifie les trois propriétés énoncées ci-dessous.

- Il est muni d'une loi pour laquelle il est stable. Par exemple l'ensemble des nombres entiers relatifs  $\mathbb{Z} = \{ \dots, -100, -99, \dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots, 99, 100, \dots \}$  est stable par la loi  $+$  : si on considère deux entiers  $n$  et  $n'$  et qu'on les additionne on obtient encore un élément de  $\mathbb{Z}$

qui est  $n+n'$ . Cela n'est pas le cas de l'ensemble  $\{-1,0,1\}$  qui ne contient pas  $1+1=2$ .

- Il faut aussi qu'il existe un neutre, c'est-à-dire un élément qui laisse tous les autres éléments inchangés lorsqu'il est combiné avec eux par cette loi. Pour  $\mathbb{Z}$  le neutre sera 0 car pour tout entier  $n$ , on a  $n+0=n$ .
- Enfin on impose à tout élément d'admettre un inverse (ou symétrique par rapport au neutre) pour la loi considérée. Un élément combiné avec son inverse donne l'élément neutre. Pour le groupe  $\mathbb{Z}$ , l'inverse d'un entier  $n$  est son opposé  $-n$  car  $n+(-n)=0$ . On voit par exemple que  $\mathbb{Z}$  n'est pas un groupe pour la multiplication car l'inverse d'un entier  $1/n$  n'est en général pas entier. De même l'ensemble des entiers naturels  $\mathbb{N}$  n'est pas un groupe pour l'addition car aucun élément n'a d'opposé dans  $\mathbb{N}$  à part 0.

Quand on se donne un groupe, on peut étudier ses représentations. Ce sont des espaces sur lesquels le groupe  $G$  agit linéairement, cela permet de se « représenter » ce groupe comme un groupe de matrices<sup>1</sup>. L'étude des représentations d'un groupe permet souvent de démontrer des propriétés fondamentales de ce groupe ; par exemple c'est l'étude des représentations des groupes finis simples<sup>2</sup> qui a permis de mettre en évidence le plus grand groupe fini simple exceptionnel qu'on appelle le monstre et qui est constitué d'environ  $8 \times 10^{53}$  éléments.

Notre travail consiste principalement à étudier les groupes de réflexions complexes qui sont des groupes de matrices inversibles. On s'intéresse aussi à l'ensemble de leurs représentations irréductibles (c'est-à-dire les plus petites possibles), que l'on notera  $Irr G$ , si l'on étudie le groupe  $G$ . À ces groupes sont associées des algèbres, ce sont des ensembles ayant une structure plus compliquée que les groupes car ils sont munis de plusieurs lois. On ne s'attardera pas sur ces objets, il faut juste savoir que ces algèbres sont construites à partir des groupes que l'on va étudier et qu'on les appelle les algèbres de Cherednik. On peut définir, de la même manière que pour les groupes, les représentations de ces algèbres. De plus, on peut identifier leurs représentations irréductibles avec celles du groupe associé [GORDON, 2003], on note alors  $L(E)$  la représentation irréductible de l'algèbre de Cherednik qui correspond à l'élément  $E$  de  $Irr G$ . À partir de  $Irr G$ , on peut construire d'autres représentations des algèbres de Cherednik que l'on appelle représentations standard et que l'on note  $M(E)$  pour  $E \in Irr G$ . Ces dernières représentations ne sont pas nécessairement irréductibles et donc admettent des sous-représentations plus petites.

Une question très importante en théorie des représentations est donc de décrire ces représentations irréductibles qui apparaissent dans les représentations standard afin de simplifier le problème : on étudie les plus petites représentations possibles pour décrire à terme toutes les autres.

---

1 Une matrice est un tableau de nombres, on verra la définition plus en détail par la suite.

2 On dit qu'un groupe est simple (ou irréductible) s'il n'a pas de sous-groupe, c'est-à-dire s'il est le plus petit possible.

Si par exemple on se donne  $E, F \in Irr G$ , on aimerait savoir si la représentation irréductible  $L(F)$  va apparaître dans la représentation standard  $M(E)$ . Cette question permet de classer naturellement les éléments de  $Irr G$  : on dit que  $F \leq E$  si  $L(F) \subset M(E)$ . Le problème est qu'il est difficile de décrire les représentations des algèbres que l'on considère. Si on se donne  $E, F \in Irr G$ , on aura du mal à calculer  $M(E)$  et  $L(F)$  et donc à savoir comment on peut classer  $E$  et  $F$ . L'idée est alors de décrire autrement cet ordre, grâce à des outils calculatoires ou géométriques, pour résoudre ce problème.

C'est l'enjeu du travail effectué pendant cette thèse : généraliser à d'autres groupes la construction d'un ordre géométrique qui a été réalisée pour un certain type de groupes. On cherchera ensuite à relier cet ordre à celui que l'on vient de présenter ainsi qu'à d'autres ordres plus calculatoires. Dans cet article, on commencera par définir de manière simple les groupes que nous étudions ainsi que leurs représentations. Ensuite on décrira ces représentations de manière combinatoire<sup>3</sup> afin d'en simplifier l'étude. Puis on expliquera comment décrire plus simplement l'ordre que l'on vient de présenter, de manière combinatoire et géométrique pour une famille de groupes. Enfin on présentera les grandes lignes de la généralisation de ces résultats à d'autres groupes.

## 2. Représentations des groupes de réflexions complexes

### 2.1. Réflexions réelles

Dès les classes de collège on rencontre des réflexions avec l'exemple des symétries orthogonales. Au lycée, on étudie l'espace  $\mathbb{R}^3$  et les symétries orthogonales par rapport à des plans : la symétrie orthogonale par rapport au plan  $P$  est l'application qui à un vecteur associe son symétrique par rapport à  $P$  (fig. 1).

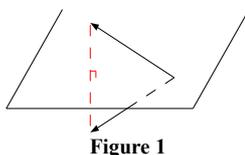


Figure 1

Plaçons-nous dans un repère bien choisi constitué de deux vecteurs non colinéaires  $(\vec{v}, \vec{w})$  du plan  $P$  et d'un vecteur  $\vec{u}$  orthogonal à ce plan. La symétrie orthogonale  $s_P$  par rapport au plan  $P$  vérifiera alors  $s_P(\vec{v}) = \vec{v}$ ,  $s_P(\vec{w}) = \vec{w}$  et  $s_P(\vec{u}) = -\vec{u}$  (fig. 2).

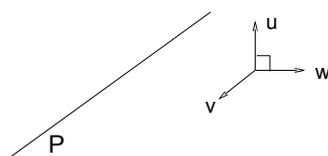


Figure 2

<sup>3</sup> La combinatoire est une branche des mathématiques étudiant, entre autre, les dénombrements, qui sont introduits au lycée dès la 1<sup>ère</sup>S.

Et donc dans la base  $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$  cette application aura pour matrice  $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ <sup>4</sup>.

Plus généralement, une réflexion réelle est une symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan

de  $\mathbb{R}^n$ . Dans une certaine base une réflexion réelle a donc pour matrice  $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

## 2.2. Réflexions complexes

Notre travail porte principalement sur les réflexions complexes qui sont une généralisation des réflexions réelles à l'ensemble des nombres complexes  $\mathbb{C}$ . Dans la matrice d'une réflexion réelle, le seul terme diagonal différent de 1 est -1 qui est la seule racine réelle de l'unité différente de 1<sup>5</sup>. Dans l'ensemble des nombres complexes, il y a d'autres racines de l'unité (par exemple le nombre  $i$  car  $i^4=1$ ) et donc il est naturel de définir les réflexions complexes de la manière suivante :

*Définition 1 : une réflexion complexe est une application de  $\mathbb{C}^n$  qui, dans une base particulière, a*

pour matrice  $\begin{pmatrix} \xi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ , où  $\xi$  est une racine de l'unité.

*Remarque :* On voit sur la matrice qu'une réflexion est inversible, c'est-à-dire qu'il existe  $s^{-1}$  tel que

$ss^{-1}=s^{-1}s$  est l'application identité. Ici  $s^{-1}$  aura pour matrice  $\begin{pmatrix} 1/\xi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

---

4 La matrice d'une application  $s$  dans la base  $(e_1, \dots, e_n)$  de  $\mathbb{R}^n$  est un tableau de nombres de taille  $n \times n$  dont la  $i^{\text{ème}}$  colonne est constituée des coordonnées de  $s(e_i)$  dans la base  $(e_1, \dots, e_n)$ . Elle caractérise l'application  $s$ .

5 Une racine de l'unité est un nombre  $x$  qui à une certaine puissance est égal à 1 (c'est-à-dire qu'il existe  $n$  tel que  $x^n=1$ ).

### 2.3. Groupe de réflexions complexes

L'ensemble des applications de  $\mathbb{C}^n$  qui sont inversibles forme un groupe appelé groupe linéaire et noté  $GL(\mathbb{C}^n)$  <sup>6</sup>.

*Définition 2 :* Un groupe fini de réflexions complexes  $G$  est un sous-groupe fini de  $GL(\mathbb{C}^n)$  qui est engendré par des réflexions <sup>7</sup>.

Par exemple, le groupe des applications qui conservent un triangle équilatéral est un groupe de réflexions. Il est composé de l'identité, des trois symétries axiales par rapport aux médianes  $\Delta_i$  du triangle (fig. 3) et de deux rotations. On retrouve les deux rotations en composant les symétries.

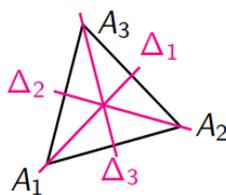


Figure 3

Shephard et Todd en 1954 ont classifié les groupes de réflexions complexes irréductibles (c'est-à-dire ceux qui n'ont pas de sous-groupe non trivial) en deux ensembles :

- une série infinie de groupes  $G(l, e, n)$ , où  $l$ ,  $e$  et  $n$  sont des entiers non nuls tels que  $e$  divise  $l$ . Le groupe  $G(l, e, n)$  est composé de matrices de taille  $n$  dont chaque ligne et chaque colonne contient un seul terme non nul. Ce terme est une racine  $l^{\text{ème}}$  de l'unité et les matrices sont telles que le produit de tous les termes non nuls est une racine  $\left(\frac{l}{e}\right)^{\text{ème}}$  de l'unité.
- 34 groupes exceptionnels qui ne sont pas de cette forme.

Exemple : on retrouve le groupe des isométries du triangle puisque c'est le groupe  $G(3,3,2)$  qui a 6 éléments.

### 2.4. Représentations du groupe $G(l, 1, n)$

Une manière d'étudier un groupe consiste à le faire agir linéairement sur des espaces qu'on appellera ses représentations. C'est par exemple grâce à la théorie des représentations que Chevalley a caractérisé les groupes de réflexions en 1955.

<sup>6</sup> Ici la loi du groupe est la composition : quand on compose deux applications inversibles, on obtient une application inversible. Il faut aussi que tout élément de l'ensemble admette un inverse, ce qui est vérifié par définition de  $GL(\mathbb{C}^n)$ .

<sup>7</sup> Cela signifie que chaque élément de  $G$  peut s'écrire comme un produit de réflexions.

Les représentations des groupes  $G(l, e, n)$  sont connues et elles sont décrites par les multipartitions de l'entier  $n$  dans le cas où  $e=1$ .

Définition 3 : Soient  $l$  et  $n$  deux entiers.

- Une partition de  $n$  est une suite de nombres entiers strictement positifs  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_r)$  rangés dans l'ordre décroissant et tels que leur somme est égale à  $n$ .

On note alors  $|\lambda| = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \dots + \lambda_r = n$ .

- Une  $l$ -multipartition de  $n$  est une famille de  $l$  partitions  $\underline{\lambda} = (\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}, \lambda^{(3)}, \dots, \lambda^{(l)})$  tel que  $|\lambda^{(1)}| + |\lambda^{(2)}| + \dots + |\lambda^{(l)}| = n$ .

On note  $\mathcal{P}(l, n)$  l'ensemble des  $l$ -multipartitions de  $n$ .

Exemples :  $(7, 3, 1)$  est une partition de 11 et  $((3, 1, 1), (2, 1), (1, 1, 1))$  est une 3-multipartition de 11.

L'ensemble des représentations irréductibles de  $G(l, 1, n)$ , que l'on note  $Irr G(l, 1, n)$ , peut être paramétré par les  $l$ -multipartitions de  $n$  (pour plus de détails cf. [GECK, 2000]). Les représentations irréductibles sont les représentations qui n'admettent pas de sous-représentations, c'est-à-dire les plus « petites » possibles. Elles permettent de décrire toutes les autres, tout comme les nombres premiers (qui sont les plus petits possibles au sens de la divisibilité) permettent de décrire tous les autres nombres. On ne s'intéressera donc qu'à ces représentations et on les notera  $\underline{\lambda}$  grâce à l'identification que l'on vient de faire.

### 3. Différents ordres sur les représentations de $G(l, 1, n)$

Dans l'introduction, on a expliqué comment on pouvait classer les représentations irréductibles d'un groupe suivant la « taille » des représentations correspondantes de l'algèbre de Cherednik associée. Grâce à l'identification entre  $Irr G(l, 1, n)$  et  $\mathcal{P}(l, n)$ , cet ordre est en fait un ordre sur les multipartitions. On notera donc  $\underline{\lambda} \leq \underline{\mu}$  si  $L(E_{\underline{\lambda}}) \subset M(E_{\underline{\mu}})$ , où  $E_{\underline{\lambda}}$  est la représentation irréductible de  $G(l, 1, n)$  associée à la multipartition  $\underline{\lambda}$ . On va essayer ici de décrire cet ordre, que l'on appellera ordre algébrique, de manière combinatoire en construisant des fonctions sur les multipartitions  $\underline{\lambda}$  qui seront reliées à cet ordre.

### 3.1. Ordres fonctionnels

#### 3.1.1. Ordre de la $c$ -fonction

Les algèbres de Cherednik dépendent de paramètres  $\mathbf{h} = (h, H_1, \dots, H_{l-1}) \in \mathbb{Q}^l$  qui apparaissent dans leur définition. Étant donné que l'on cherche à décrire, par des fonctions, un ordre défini à partir de ces algèbres, il est normal que le paramètre  $\mathbf{h}$  apparaisse dans la définition de ces fonctions.

Définition 4 :

- Soit  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_r)$  une partition d'un entier. On note  $n(\lambda)$  l'entier  $\sum_{i=1}^r (i-1)\lambda_i$ .
- Soient  $\underline{\lambda}$  une  $l$ -multipartition de  $n$  et  $\mathbf{h}$  un paramètre, on définit la  $c$ -fonction par :

$$c_{\mathbf{h}}(\underline{\lambda}) = l \sum_{i=2}^l |\lambda^{(i)}| (H_1 + \dots + H_{i-1}) - l \left( \frac{n(n-1)}{2} + \sum_{i=1}^l (n(\lambda^{(i)}) - n(\lambda^{(i)'})) \right)$$

Remarque : Cette formule peut paraître barbare au lecteur (elle fait intervenir l'entier  $n(\lambda)$  ainsi que la partition transposée  $\lambda'$  d'une partition que l'on a pas défini afin de ne pas trop alourdir mais qui se retrouve facilement à partir de la partition  $\lambda$ ) mais ce qu'il est important de voir ici c'est la facilité de calcul. En effet si on se donne une multipartition  $\underline{\lambda}$  on pourra calculer assez rapidement la fonction  $c_{\mathbf{h}}(\underline{\lambda})$ .

Cette fonction va induire un ordre sur les multipartitions car pour un paramètre  $\mathbf{h}$  fixé et deux multipartitions  $\underline{\lambda}$  et  $\underline{\mu}$ , on pourra calculer les valeurs de la  $c$ -fonction  $c_{\mathbf{h}}(\underline{\lambda})$  et  $c_{\mathbf{h}}(\underline{\mu})$  qui sont des rationnels et les comparer grâce à l'ordre que l'on connaît sur les réels. On aimerait alors savoir si cet ordre, qui est décrit très facilement, est lié à l'ordre algébrique sur les multipartitions défini par les algèbres de Cherednik. Le théorème suivant démontré dans [ROUQUIER, 2008] va même plus loin car il décrit l'ordre algébrique grâce à la  $c$ -fonction.

Théorème 1 : Soient  $\underline{\lambda}$  et  $\underline{\mu}$  deux  $l$ -multipartitions de  $n$  et  $\mathbf{h}$  un paramètre. Dire que  $\underline{\lambda} \leq \underline{\mu}$  est équivalent à dire que  $c_{\mathbf{h}}(\underline{\lambda}) - c_{\mathbf{h}}(\underline{\mu}) \in \mathbb{N}$ .

Ce résultat est fondamental car il affirme que pour savoir si la représentation  $L(E_{\underline{\lambda}})$  est une sous-représentation de  $M(E_{\underline{\mu}})$  il suffit de calculer  $c_{\mathbf{h}}(\underline{\lambda})$  et  $c_{\mathbf{h}}(\underline{\mu})$  et de voir si la différence est un entier naturel, ce qui simplifie énormément le problème.

*Remarque :* On peut aussi voir l'ordre de la  $c$ -fonction comme un ordre algébrique car la  $c$ -fonction est définie pour tous les groupes de réflexions complexes de manière algébrique. Pour cela on définit un élément central<sup>8</sup> de l'algèbre de Cherednik qu'on appelle élément d'Euler et qui va agir par un réel sur la représentation irréductible  $E_{\underline{\lambda}}$ . C'est ce réel que l'on note  $c_h(\underline{\lambda})$  et dans le cas du groupe  $G(l, 1, n)$  son expression est celle que l'on a donnée dans la définition 4 (cf. [ROUQUIER, 2008]). D'ailleurs le théorème 1 est vérifié pour tous les groupes de réflexions complexes avec cette définition de la  $c$ -fonction.

L'ordre défini par la  $c$ -fonction est donc un ordre « naturel » car la  $c$ -fonction apparaît dans les propriétés des groupes de réflexions.

### 3.1.2. Ordre de la $a$ -fonction

On peut définir une autre fonction sur les multipartitions : la  $a$ -fonction. On ne détaillera pas ici la construction qui risque d'être un peu rébarbative mais pour plus de détails, on pourra se référer à [GECK, 2011]. De plus, cette fonction est reliée à la  $c$ -fonction car, d'après [CHLOUVERAKI, 2012], à une constante près on a :

$$c_h(\underline{\lambda}) = a_h(\underline{\lambda}) + a_h(\underline{\lambda}').^9$$

Enfin, l'ordre défini sur les multipartitions par les valeurs que va prendre la  $a$ -fonction est relié à l'ordre que l'on cherche à décrire, sous certaines hypothèses, de la manière suivante dans [GECK, 1998] :

*Théorème 2 :* Soient  $\underline{\lambda}$  et  $\underline{\mu}$  deux  $l$ -multipartitions de  $n$  et  $h$  un paramètre. Si  $\underline{\lambda} \leq \underline{\mu}$  alors  $a_h(\underline{\lambda}) \leq a_h(\underline{\mu})$ .

Ce résultat est plus faible que le théorème 1 car on a ici seulement une implication, c'est-à-dire que si  $a_h(\underline{\lambda}) \leq a_h(\underline{\mu})$  alors on n'est pas sûr que  $L(E_{\underline{\lambda}})$  est une sous-représentation de  $M(E_{\underline{\mu}})$ . Néanmoins, il donne un moyen de vérifier que ce n'est pas le cas. De plus, malgré le lien entre les fonctions  $c$  et  $a$  les deux ordres qu'elles définissent sur les multipartitions ne sont pas reliés. Il n'y a donc pas de connexion directe entre l'ordre algébrique et l'ordre de la  $a$ -fonction, ce qui rend ce résultat intéressant.

<sup>8</sup> C'est-à-dire un élément qui commute avec tous les autres

<sup>9</sup> Ici  $\underline{\lambda}' = (\lambda^{(1)'}, \lambda^{(2)'}, \dots, \lambda^{(l)'})$  est la multipartition transposée de  $\underline{\lambda}$ .

### 3.2. Ordre géométrique

On aimerait maintenant décrire cet ordre algébrique de manière géométrique. Cela revient à construire un ordre sur les multipartitions, grâce à des objets géométriques, qui se rapprocherait de l'ordre décrit dans l'introduction. Cet ordre a été construit pour le groupe  $G(l, 1, n)$  par Iain Gordon dans [GORDON, 2008]. On va expliquer rapidement dans ce paragraphe sa construction pour pouvoir la généraliser par la suite à  $G(l, e, n)$ .

Les objets géométriques qui entrent en jeu dans cette construction sont des variétés. Pour visualiser ces objets on peut se placer dans l'espace de dimension 3 : ce seront alors des points, des courbes, des surfaces ou des ensembles de points, courbes ou surfaces. Plus précisément, pour construire l'ordre géométrique sur les représentations de  $G(l, 1, n)$ , Gordon utilise les variétés de carquois  $\mathcal{M}_{\mathbf{h}}$  qui sont reliées aux algèbres de Cherednik par le même paramètre  $\mathbf{h}$ . Suivant le paramètre  $\mathbf{h}$  choisi, la variété  $\mathcal{M}_{\mathbf{h}}$  est lisse<sup>10</sup> ou non. Par exemple pour  $l=2$  et  $n=1$  (on retrouve alors le groupe  $G(2, 1, 1)$ , le groupe à 2 éléments... qui est un des seuls cas où on peut vraiment faire les calculs et des dessins !), la variété  $\mathcal{M}_{\mathbf{0}}$  pour  $\mathbf{h}=(0,0)$  est le cône de la figure 4, qui a pour équation  $x^2=yz$ . On voit bien que cette variété a un point singulier  $(0,0,0)$  et pour  $\mathbf{h}=(-1,1)$ , la variété  $\mathcal{M}_{\mathbf{h}}$  est lisse (fig. 5).

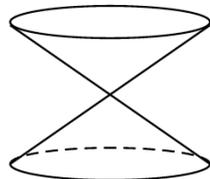


Figure 4

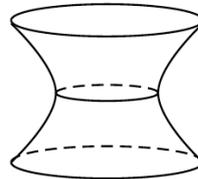


Figure 5

Gordon a ensuite muni cette variété d'une action de  $\mathbb{C}^*$ , c'est-à-dire que pour un nombre complexe non nul  $\rho$ , il a construit une application  $f_{\rho}$  qui à un point  $x$  de  $\mathcal{M}_{\mathbf{h}}$  lui associe un autre point  $f_{\rho}(x)$ . Par exemple, toujours dans le cas simple  $G(2, 1, 1)$ , l'action est définie par  $f_{\rho}(x, y, z)=(x, \rho^2 y, \rho^{-2} z)$  (dans le cas du cône  $\mathcal{M}_{\mathbf{0}}$  on voit bien que cette action transforme un point du cône en un autre point du cône en regardant l'équation). Quand on définit une action d'un groupe sur un ensemble, il est intéressant de déterminer les points fixes, c'est-à-dire les points qui resteront invariants sous l'action de tous les éléments du groupe. Si on revient à l'exemple de  $G(2, 1, 1)$ , les points fixes seront les points  $(x, y, z)$  du cône tels que pour tout nombre complexe  $\rho$ ,  $(x, \rho^2 y, \rho^{-2} z)=(x, y, z)$ . On voit tout de suite que  $y$  et  $z$  doivent être nuls et d'après l'équation

<sup>10</sup> Une variété est lisse si elle n'a pas de singularités. Par exemple, on dit qu'une courbe est lisse si elle représente une fonction dérivable

du cône,  $x$  aussi. Donc la variété  $\mathcal{M}_0$  n'a qu'un point fixe et ce point est aussi son seul point singulier. Dans le cas où la variété est lisse, Gordon a montré que les points fixes de  $\mathcal{M}_h$  étaient en bijection avec les représentations irréductibles de  $G(l,1,n)$ , et donc avec les multipartitions. Revenons à notre exemple : le groupe à deux éléments a deux représentations irréductibles et donc  $\mathcal{M}_h$  doit avoir deux points fixes sous l'action de  $\mathbb{C}^*$  qui sont représentés sur la figure 6 :

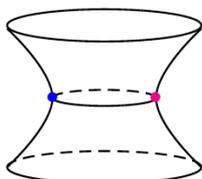


Figure 6

Grâce à cette correspondance entre les multipartitions et les points fixes de  $\mathcal{M}_h$ , classer les multipartitions revient à classer les points fixes de cette variété. Gordon a donc construit un ordre sur les points fixes qu'il a transféré sur les multipartitions et c'est cet ordre qu'on appelle ordre géométrique. Décrivons rapidement comment est défini cet ordre : à un point fixe  $x_0$  est associé un ensemble attractif  $X_{x_0}$  qui correspond aux points qui sont attirés par ce point fixe sous l'action de  $\mathbb{C}^*$ <sup>11</sup>. Pour notre exemple les ensembles attractifs correspondant aux deux points fixes sont représentés sur la figure 7 :

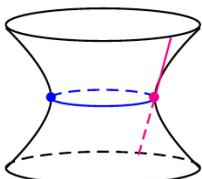


Figure 7

On peut s'intéresser à l'adhérence d'un ensemble attractif, qui correspond à cet ensemble auquel on rajoute sa frontière. Dans le cas de notre exemple, l'ensemble attractif rose est une droite qui est égale à sa propre frontière, donc pour décrire son adhérence on ne rajoute aucun point. Pour l'ensemble bleu, il ne contient pas le point rose, par contre ce point est dans sa frontière. Donc l'adhérence de l'ensemble bleu est l'ensemble bleu auquel on ajoute le point rose.

Gordon définit l'ordre sur les points fixes de la manière suivante : un point fixe est « plus petit » qu'un autre si l'adhérence de son ensemble attractif rencontre l'autre ensemble attractif. Dans notre exemple, l'adhérence de l'ensemble rose ne rencontre pas le bleu mais par contre l'adhérence du bleu rencontre le rose (au point rose) et donc l'ordre sur les points fixes est le suivant : « le point bleu est dit plus petit que le point rose ».

Cet ordre se transporte en un ordre sur les multipartitions de la manière suivante :

<sup>11</sup> Plus précisément  $X_{x_0} = \{x \in X, \lim_{\rho \rightarrow 0} \rho \cdot x = x_0\}$ .

*Définition 5 :* Soient  $\underline{\lambda}$  et  $\underline{\mu}$  deux  $l$ -multipartitions de  $n$ , on dit que  $\underline{\lambda} <_h \underline{\mu}$  si le point fixe de  $\mathcal{M}_h$  qui correspond à  $\underline{\lambda}$  est plus petit que celui qui correspond à  $\underline{\mu}$ .

### 3.3. Lien entre les différents ordres

On vient de définir quatre ordres sur les multipartitions : l'ordre algébrique, l'ordre de la  $c$ -fonction, l'ordre de la  $a$ -fonction et l'ordre géométrique. On voudrait maintenant les relier dans le but de savoir si l'ordre géométrique est un « bon ordre », c'est-à-dire s'il se rapproche de l'ordre algébrique que l'on cherche à décrire. On a déjà vu au paragraphe 3.1. que l'ordre algébrique impliquait les deux ordres fonctionnels (l'ordre de la  $c$ -fonction et celui de la  $a$ -fonction).

Gordon a montré, toujours dans le même article, que l'ordre géométrique entraîne celui de la  $c$ -fonction et il a aussi affirmé qu'il implique celui de la  $a$ -fonction mais sa démonstration était fautive. Nous l'avons démontré d'une autre manière et on a obtenu le résultat suivant :

*Théorème 3 :* Soient  $\underline{\lambda}$  et  $\underline{\mu}$  deux  $l$ -multipartitions de  $n$ , si  $\underline{\lambda} <_h \underline{\mu}$  alors  $a_h(\underline{\lambda}) < a_h(\underline{\mu})$ .

Ces deux résultats nous donnent confiance pour généraliser la construction de l'ordre géométrique à d'autres groupes de réflexions car il semble être un bon ordre. En effet il est relié aux autres ordres de la même manière que l'ordre algébrique. Concernant la démonstration du théorème 3, on a simplement utilisé la description combinatoire de l'ordre géométrique qu'a fait Iain Gordon dans son article, puis on l'a relié à l'ordre sur les symboles  $\kappa$  qui permet de décrire combinatoirement l'ordre de la  $a$ -fonction (cf. [GECK, 2011]).

## 4. Ordre géométrique sur les représentations de $G(l, e, n)$

### 4.1. Algèbre de Cherednik associée à $G(l, e, n)$

D'après la description des groupes  $G(l, e, n)$  que l'on a donnée au paragraphe 2.3., on voit que  $G(l, e, n)$  est un sous-groupe de  $G(l, 1, n)$ . De plus le quotient  $G(l, 1, n)/G(l, e, n)$  est le groupe cyclique  $C_e$  qui a  $e$  éléments.

On peut parler de l'algèbre de Cherednik associée au sous-groupe  $G(l, e, n)$  et donc d'ordre algébrique sur les représentations de  $G(l, e, n)$ . On voudrait alors construire un ordre géométrique pour  $G(l, e, n)$  qui décrirait cet ordre algébrique. Comme on sait que celui construit pour  $G(l, 1, n)$  est un bon ordre, l'idée est de s'en inspirer. Il faudrait donc pouvoir comparer les ordres algébriques pour les groupes  $G(l, e, n)$  et  $G(l, 1, n)$ . Pour cela il faut que l'algèbre de Cherednik

associée à  $G(l, e, n)$  soit une sous-algèbre de celle associée à  $G(l, 1, n)$ . Ceci n'est vérifié que pour des paramètres  $\mathbf{h}$  pour lesquels la variété  $\mathcal{M}_{\mathbf{h}}$  n'est pas lisse. Un premier problème se pose donc : il faut passer outre l'hypothèse de régularité faite par Gordon et construire un ordre géométrique pour  $G(l, 1, n)$  dans le cas où la variété n'est pas lisse. Autre problème, dans le cas non lisse,  $\mathcal{M}_{\mathbf{h}}$  a moins de points fixes sous l'action de  $\mathbb{C}^*$ . Ils ne sont donc pas en bijection avec les représentations irréductibles de  $G(l, 1, n)$  mais avec des blocs de représentations, c'est-à-dire des ensembles dans lesquels certaines représentations sont regroupées, qu'on appelle blocs de Calogero-Moser. Donc dans ce cas, l'ordre que l'on va construire sera un ordre sur les blocs et non plus sur les représentations irréductibles. Cela ne posera pas de problème car les blocs de  $G(l, 1, n)$  sont reliés à ceux de  $G(l, e, n)$ .

## 4.2. Représentations de $G(l, e, n)$

Pour  $e \neq 1$  les représentations irréductibles de  $G(l, e, n)$  ne sont pas paramétrées par les multipartitions par contre elles sont décrites dans [BELLAMY, 2012] à partir de celles de  $G(l, 1, n)$ . Elles sont paramétrées par des paires  $(\{\underline{\lambda}\}, \epsilon)$  où  $\{\underline{\lambda}\}$  est l'orbite de  $\underline{\lambda}$  sous l'action de  $C_e$  et  $\epsilon$  est un élément de  $C_e$  qui laisse fixe  $\underline{\lambda}$  par cette action. On ne va pas détailler plus cette description, le principal est de savoir que les représentations de  $G(l, e, n)$  sont paramétrées sur le même principe que celles de  $G(l, 1, n)$ .

De plus, Bellamy décrit aussi les blocs de Calogero-Moser de ces deux groupes. Il en ressort que si  $e$  ne divise pas  $n$  ( $e \nmid n$ ) alors les deux groupes ont les mêmes blocs et dans le cas où  $e$  divise  $n$  ( $e \mid n$ ), c'est plus compliqué.

## 4.3. Ordre géométrique dans le cas non lisse

Dans le cas où la variété  $\mathcal{M}_{\mathbf{h}}$  n'est pas lisse, on perd des propriétés sur les ensembles attractifs<sup>12</sup> et donc dans ce cas général on ne peut pas définir rigoureusement l'ordre géométrique comme l'a fait Gordon dans le cas lisse. Heureusement, cette variété conserve quand même des propriétés intéressantes : elle est normale, ce qui est une propriété un peu plus faible que la régularité. Cela nous permet quand même de l'inclure dans un espace qui a de bonnes propriétés (il est projectif), dans lequel l'ordre géométrique est bien défini.

On peut donc définir un ordre géométrique sur les blocs de  $G(l, 1, n)$  dans le cas non lisse. Or pour  $e \nmid n$ , d'après le paragraphe précédent, les blocs de  $G(l, 1, n)$  sont les mêmes que ceux de

---

<sup>12</sup> La décomposition de Bialynicki-Birula qui partitionne  $X$  en ensembles attractifs n'est plus filtrable.

$G(l, e, n)$ . On a donc construit un ordre géométrique pour  $G(l, e, n)$  dans le cas où  $e \nmid n$ . De plus, comme il est fortement relié à celui de  $G(l, 1, n)$ , on peut montrer que c'est un bon ordre en montrant qu'il entraîne les ordres de la  $c$ -fonction et de la  $a$ -fonction.

## 5. Conclusion et perspectives

Notre travail a permis de « mettre de l'ordre » dans les différents ordres définis sur les représentations du groupe  $G(l, 1, n)$  en en reliant certains. De plus, nous avons généralisé le travail de Gordon aux groupes  $G(l, e, n)$  pour  $e \nmid n$ .

Il nous reste maintenant à traiter le cas où  $e$  divise  $n$ , qui est plus difficile. En effet dans ce cas, les blocs des deux groupes sont différents. Cette différence de traitement entre les cas  $e \nmid n$  et  $e \mid n$  est classique dans l'étude de ces groupes. Il va donc falloir construire une autre variété à partir de la variété  $\mathcal{M}_n$  qui aura plus de points fixes. L'idée est « d'éclater » les points fixes correspondant aux blocs qui posent problème. On est encore à la phase des essais sur des exemples (les groupes  $G(2, 1, 2)$  et  $G(2, 2, 2)$ ), avant de passer à la théorie. Même si ces groupes sont petits, les calculs sont si compliqués qu'il est impossible de les faire à la main et c'est dans ce cas qu'on fait appel à des logiciels de calcul comme ceux dont on parlait dans l'introduction.

## Bibliographie

BELLAMY, G., « The Calogero-Moser partition for  $G(m, d, n)$  », à paraître dans *Nagoya Math. Journal*, [réf. de janvier 2012].

Disponible sur internet : <<http://personalpages.manchester.ac.uk/staff/gwyn.bellamy/index.htm>>.

CHEVALLEY, C., « Invariants of finite groups generated by reflections », *American Journal of Mathematics*, 1955, vol. 77 p. 778-782.

CHLOUVERAKI, M. ; GORDON, I. ; GRIFFETH, S., « Cell modules and canonical basic sets for Hecke algebras from Cherednik algebras », à paraître dans *AMS Contemporary Mathematics Series*, [réf. de janvier 2012]. Disponible sur internet : <<http://www.maths.ed.ac.uk/~chlouveraki/>>.

CHLOUVERAKI, M. ; JACON, N., « Schur elements and basic sets for cyclotomic Hecke algebras », à paraître dans *Journal of Algebra and its Applications*, [réf. de janvier 2012].

Disponible sur internet : <<http://www.maths.ed.ac.uk/~chlouveraki/>>.

GECK, M., « Kazhdan-Lusztig cells and decomposition numbers », *Representation theory (electronic journal)*, 1998, vol. 2 p. 264-277.

GECK, M. ; JACON, N., *Representations of Hecke algebras at roots of unity*. Springer : 2011, vol. 15.

GECK, M. ; PFEIFFER, G., *Characters of finite Coxeter Groups and Iwahori-Hecke algebras*. Oxford Science : 2000, 463 p.

GORDON, I. G., « Baby Verma modules for rational Cherednik algebras », *Bulletin of the London Mathematical Society*, 2003, vol. 35 p. 321-336.

GORDON, I. G., « Quiver varieties, category O for rational Cherednik algebras, and Hecke algebras », *Int Math Res Papers*, 2008, vol. 2008, 69 p.

ROUQUIER, R., «  $q$ -Schur algebras and complex reflection groups », *Moscow mathematical journal*, 2008, vol. 8 p. 119-138.

SHEPARD, G. C. ; TODD, J. A., « Finite unitary reflection groups », *Canadian J. Math.*, 1954, vol. 6 p. 274-304.