# LES PLANTES FONT-ELLES DES MATHÉMATIQUES ?

Anne-Marie AEBISCHER - Françoise de LABACHELERIE

IREM DE FRANCHE-COMTÉ

## Table des matières



## I - La croissance des plantes

### A - Observation de plantes

En observant une pomme de pin, on remarque que les écailles semblent organisées selon des spirales. Certaines spirales sont orientées vers la droite, d'autres vers la gauche. Sur une première pomme de pin, on peut compter 8 spirales orientées vers la droite, et 13 spirales orientées vers la gauche. Sur une deuxième pomme de pin, d'une espèce différente, on peut également observer des spirales, au nombre de 8 vers la droite, et de 5 vers la gauche.

Observons ensuite un ananas : encore une fois des spirales apparaissent : 8 spirales orientées vers la droite, 13 spirales orientées vers la gauche.

Regardons maintenant des photos de tournesols : les fleurons semblent aussi s'organiser selon des spirales. En comptant le nombre de spirales, celles orientées dans un sens, puis celles orientées dans l'autre sens, on en trouve, selon les tournesols, 34 et 55, ou bien 55 et 89 ou encore 89 et 144.

Si l'on regarde de plus près les nombres trouvés en comptant les spirales, aussi bien des pommes de pin que des ananas et des tournesols, **5, 8, 13, 21, 34, 55, 89**, on remarque que, mis par ordre croissant, ces nombres forment une suite telle que chaque terme est la somme des deux précédents.

Cette suite est célèbre ! Elle est connue sous le nom de « suite de Fibonacci ». Fibonacci, ou encore Léonard de Pise, c'est le nom d'un mathématicien italien du XII$^{e}$-XIII$^{e}$ siècle. Fibonacci en est venu à s'intéresser à cette suite de nombres quand il s'est intéressé à la façon dont évoluait une population de lapins. Son problème était le suivant : *Un homme installe un couple de lapins naissants dans un endroit clos. Combien de couples de lapins obtient-on à la fin d'une année si chaque couple peut se reproduire au second mois de son existence et produit alors un nouveau couple chaque mois ?*

La population de lapins au fil des mois était donnée par cette même suite où **chaque terme est la somme des deux précédents**.

Il est assez étonnant que cette suite apparaissent aussi chez les plantes, et nous allons maintenant essayer d'éclaircir deux points :

> Pourquoi des spirales apparaissent-elles lors de la croissance de certaines plantes ?
> Pourquoi le nombre de spirales est-il toujours un élément de la suite de Fibonacci ?

### B - Modèle simplifié de croissance

Pour répondre aux questions précédentes, nous allons d'abord nous intéresser à la façon dont se développent les plantes. Plus précisément nous allons nous intéresser à la croissance des plantes qui se développent en formant des spirales. Cette famille de plantes, en croissance dite « spiralée », a été décrite dès l'antiquité, mais les descriptions ne deviennent plus précises qu'à partir du début du XIX$^{e}$ siècle. C'est-à-dire assez récemment, si l'on compare à la suite de Fibonacci connue depuis le début du XIII$^{e}$ siècle.

Voilà ce que l'on sait de la croissance de plantes comme les tournesols vers 1830 : au centre se trouve une partie circulaire, appelée « zone apicale », ou « apex », et à la périphérie de celle-ci, des protubérances. Ces protubérances, appelées des « primordia » sont d'abord indifférenciés, et donneront plus tard soit des feuilles, soit des écailles pour les pommes de pin, soit ce que l'on appelle les fleurons pour les tournesols, etc ….

On sait également que les primordia se développent en suivant les règles suivantes :

- Les primordia naissent au bord de l'apex, à intervalles de temps réguliers.
- Ils se déplacent ensuite radialement.
- Deux primordia successifs forment entre eux un angle que l'on appelle « angle de divergence ». Cet angle est le même entre le 1$^{er}$ et le 2$^{e}$ primordium qu'entre le 35$^{e}$ et le 36$^{e}$. L'angle de divergence est supposé constant tout au long du développement de la plante.

Nous allons déterminer une valeur approchée de cet angle de divergence pour les boutons de la catopsis de la photo. Pour cela, nous allons utiliser la même méthode que deux botanistes allemands, Karl Schimper et Alexander Braun, en 1835. On repère deux boutons situés à peu près à la verticale l'un de l'autre, comme sur la photo : les deux éléments cerclés de noir sont approximativement sur une même verticale. On va de l'un à l'autre en 8 étapes, et en faisant 3 tours complets. Tourner de 3 tours en 8 étapes, cela revient à tourner de $\frac{3}{8}$ de tour à chaque étape. L'angle, entre deux boutons successifs, est donc égal à $\frac{3}{8}$ de tours. Et $\frac{3}{8}$ de tours, cela correspond à 135°. Sur la catopsis, l'angle de divergence est donc approximativement égal à 135°.

> Nous allons maintenant, en utilisant ces règles de croissance, tenter de répondre aux deux questions que nous nous étions posées :
> Pourquoi des spirales apparaissent-elles lors de la croissance de certaines plantes ?
> Pourquoi le nombre de spirales est-il toujours un élément de la suite de Fibonacci ?

## II - DES SPIRALES : POURQUOI ET COMBIEN ?

### A - Expérimentations avec un simulateur

Maintenant qu'un modèle de croissance a été défini, c'est-à-dire que nous avons des hypothèses, des règles sur la façon dont croit une plante, nous allons pouvoir simuler cette croissance, et observer les résultats obtenus. Nous allons pour cela utiliser un « simulateur de tournesols » réalisé par des élèves d'un lycée d'Ivry sur Seine, en 2001-2002, à l'occasion d'un TPE. Il est en accès libre à l'adresse http://tpe.tournesol.free.fr/tournesol.htm

Avec ce simulateur, les tournesols poussent selon les trois hypothèses données plus haut :

- naissance des primordia au bord de l'apex,
- éloignement radial,
- angle de divergence constant.



Le simulateur permet également de choisir l'angle de divergence. Nous allons donc faire pousser des tournesols, avec différents angles de divergence.

- **Angle entre 2 primordias** = 135°

  Regardons comment pousse un premier tournesol avec un angle de divergence égal à 135°, en gardant les paramètres préréglés (10,3,1,1000,25) et en numérotant les primordia.

  – On peut vérifier que l'angle entre le « 1 » et le « 2 » est bien égal à 135°, c'est-à-dire $\frac{3}{8}$ de tour.

  – On voit les primordia s'organiser selon 8 demi-droites, ou « rayons ». Pourquoi 8 ? Parce que nous effectuons des huitièmes de tours : au bout de 8 « naissances », on a fait 3 tours complets. La naissance du 9$^{e}$ primordium se fait sur l'apex au même endroit que le 1$^{er}$. Cette situation est semblable à ce que l'on a observé sur la catopsis.

- **Angle entre 2 primordias** = 136°

  On fait maintenant pousser un deuxième tournesol en prenant un angle de divergence égal à 136°, et en gardant les mêmes paramètres. Les demi-droites, ou rayons, apparaissent un peu courbées. C'est parce qu'au bout de 8 naissances, on a fait un peu plus de 3 tours, et donc le 9$^{e}$ primordium naît un peu plus bas que le 1$^{er}$, le 17$^{e}$ encore un peu plus bas, etc . . .
  Pour mieux voir « ces rayons courbés », on peut refaire une deuxième simulation, avec davantage de primordia (100), et avec une période d'apparition plus courte (250). Là, on voit nettement apparaître des spirales. Ce sont des spirales de cette sorte que nous avons observées sur les pommes de pin, les tournesols.Ces spirales n'existent pas réellement, c'est notre cerveau qui relie entre eux les plus proches voisins. Le mot savant pour nommer ces spirales des plus proches voisins est le mot « parastiche ».
  Ici il y en a 8 parce que l'angle entre 2 primordia successifs, ce n'est pas tout-à-fait des huitièmes de tours, mais presque...
  C'est ce qui se passait pour les pommes de pin sur lesquelles on a observé 8 spirales. Et quand on a observé 13 spirales, ou 13 parastiches, sur la pomme de pin ou sur l'ananas, c'est que l'angle entre 2 primordia successifs, ce n'était pas tout-à-fait des treizièmes de tours (un peu plus ou un peu moins), mais presque...

- **Angle entre 2 primordias** = 140°

  Recommençons la simulation avec un angle de divergence égal à 140°. À quoi peut-on s'attendre ? À un ensemble de 8 spirales davantage courbées que les précédentes ?

  – Faisons une première simulation en reprenant les paramètres initiaux (25 primordia et une période d'apparition de 1000). On voit apparaître 5 spirales !
  – Faisons une deuxième simulation, avec 100 primordia, et une période d'apparition de 250. Au début, on voit apparaître ces 5 spirales, mais ensuite, en s'éloignant, les primordia semblent plutôt s'organiser selon des demi-droites. Il y a 18 demi-droites (sans les compter, on peut savoir qu'il y en a 18, car le voisin du « 1 », c'est le « 19 ».)

  Les 18 demi-droites s'expliquent par le fait que $\frac{140}{360} = \frac{7}{18}$, les naissances se font tous les sept dix-huitièmes de tours, et donc au bout de 18 « naissances », on a fait 7 tours complets.

  En revanche, comment expliquer que l'on voit 5 spirales ? Sans doute parce que 140°, c'est assez proche de cinquièmes de tours ? C'est ce que nous allons vérifier.

**Retour au diaporama : bilan de la simulation**

– Si l'angle de divergence est une portion de tour égale à une fraction « simple » comme $\frac{3}{8}$, les fleurons s'organisent selon des demi-droites issues du centre de l'apex.
– Si l'angle de divergence est proche d'une fraction « simple », on voit apparaître des spirales, en nombre égal au dénominateur de la fraction « simple ».



Ces spirales, ou parastiches, n'existent pas dans la réalité, c'est notre cerveau qui relie mentalement les plus proches voisins.

– Si l'angle de divergence est une portion de tour égale à une fraction de dénominateur plus élevé : l'organisation en demi-droites met davantage de temps à apparaître.. mais elle finit quand même par apparaître ! De manière inattendue, on a aussi vu apparaître d'autres organisations en spirales. Le nombre de spirales dépend du dénominateur des fractions qui approchent l'angle de divergence.

Nous avons donc pu répondre à la première question :

| |
|---|
| Pourquoi des spirales apparaissent-elles lors de la croissance de certaines plantes ?<br>*C'est l'indice que l'angle de divergence est proche d'une fraction rationnelle « simple ». Il y a autant de spirales que le dénominateur de cette fraction.* |

Pour avancer sur la deuxième question : « Pourquoi le nombre de spirales est-il toujours un élément de la suite de Fibonacci ? », nous allons essayer de trouver a priori, sans simulation, les fractions « simples » proches d'un angle de divergence donné. Le paragraphe suivant essaye donc de répondre à la question :

| |
|---|
| Comment trouver les fractions « simples » proches d'une fraction donnée ? |

## B - Se laisser approcher par des fractions

Nous allons nous intéresser par exemple aux fractions proches de $\frac{140}{360}$. On sait que $\frac{140}{360} = \frac{7}{18}$, et nous recherchons des fractions de dénominateur inférieur à 18 qui soient proches de $\frac{7}{18}$. Cette recherche, algorithmique, nous la faisons en commençant avec un dénominateur égal à 2, puis en augmentant le dénominateur, jusqu'à 18. Elle peut se faire « à la main », ou via l'écriture d'un programme.

– Commençons par chercher la fraction de dénominateur 2 la plus proche de $\frac{7}{18}$ : on trouve $\frac{1}{2}$.

– Cherchons ensuite s'il existe une fraction de dénominateur 3 plus proche de $\frac{7}{18}$ que $\frac{1}{2}$ : on trouve $\frac{1}{3}$.

– Puis cherchons s'il existe une fraction de dénominateur 4 plus proche de $\frac{7}{18}$ que $\frac{1}{3}$. Il n'en existe pas.

– On trouve ensuite $\frac{2}{5}$ qui est plus proche que les précédentes.

– En continuant à augmenter ainsi le dénominateur et à essayer de s'approcher de $\frac{7}{18}$, on trouve $\frac{5}{13}$, puis $\frac{7}{18}$.

Il existe en mathématiques un autre outil que cet algorithme pour trouver des fractions approchant un nombre réel. Cet outil est ce que l'on appelle le « **développement en fractions continues** ».

Développons par exemple le nombre $\frac{140}{360}$ en fractions continues :

$$\frac{140}{360} = \frac{1}{\frac{360}{140}} = \frac{1}{2+\frac{80}{140}} = \frac{1}{2+\frac{1}{\frac{140}{80}}} = \frac{1}{2+\frac{1}{1+\frac{60}{80}}} = \frac{1}{2+\frac{1}{1+\frac{1}{\frac{80}{60}}}} = \frac{1}{2+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{20}{60}}}} = \frac{1}{2+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{3}}}}$$

Une fois ce développement en fractions de $\frac{140}{360}$ obtenu, on peut en déduire des approximations en fractions de $\frac{140}{360}$ « plus simples » : de la même façon que pour obtenir des approximations décimales d'un nombre réel, on tronque le développement décimal, ici, pour obtenir des approximations fractionnaires, on tronque le développement en fractions :



$$\frac{7}{18}=\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3}}}}\approx\frac{1}{2}\qquad \frac{7}{18}=\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3}}}}\approx\frac{1}{3}\qquad \frac{7}{18}=\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3}}}}\approx\frac{2}{5}$$

Nous retrouvons ainsi certaines des approximations trouvées précédemment. Il en manque une !

Pour mieux appréhender le mécanisme, reprenons la recherche des plus proches fractions avec le nombre $\frac{137}{360}$. Avec premier algorithme, on obtient les valeurs approchées $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{8}, \frac{5}{13}, \frac{8}{21}, \ldots$ Certaines sont des valeurs approchées par excès, d'autres par défaut. Parmi celles-ci, seules $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{8}, \frac{8}{21}$ et $\frac{43}{113}$ sont obtenues par troncature du développement en fractions. On peut remarquer que ce sont celles qui sont le plus près de $\frac{137}{360}$, juste avant que l'on ne change de côté.

Comment utiliser ces résultats pour prédire ce que l'on verra en construisant un tournesol avec un angle de 137° ? On regarde les valeurs approchées assez proches de $\frac{137}{360}$, mais avec des dénominateurs pas trop grands : $\frac{3}{8}$ et $\frac{8}{21}$. On devrait voir un ensemble de 8 spirales tournant vers la gauche, et un ensemble de 21 spirales tournant vers la droite. C'est ce que l'on voit effectivement....

> Connaissant un angle de divergence, nous savons prédire le nombre de spirales qui vont apparaître : on détermine les fractions proches de l'angle de divergence, les dénominateurs donnent les nombres de spirales.

Pour comprendre pourquoi dans les plantes le nombre de spirales est toujours un élément de la suite de Fibonacci, nous allons d'abord essayer de répondre à la question :

> Quel est l'angle de divergence lors de la croissance des plantes ?

## III - LES MYSTÈRES DES TOURNESOLS

### A - Recherche de l'angle optimal

Comme nous connaissons le nombre de spirales qui apparaissent dans les tournesols, nous pourrions, éventuellement par essais successifs, chercher l'angle de divergence qui va bien. Mais ce n'est pas cette démarche que nous allons suivre, car elle ne nous éclairerait pas sur les raisons qui font que c'est cet angle là, et pas un autre.
Nous allons revenir à la botanique et utiliser une hypothèse supplémentaire concernant la croissance des plantes. Cette hypothèse a été proposée en 1868 par le botaniste **Hofmeister : le développement des primordia se fait de façon à maximiser l'occupation de l'espace.** Ce fut une avancée très importante dans la compréhension du développement des plantes, et c'est, à peu de choses près, ce modèle de Hofmeister qui est encore de nos jours le modèle utilisé par les chercheurs contemporains.

Notre question devient alors :

> Comment choisir l'angle de divergence pour occuper au maximum l'espace ?

Nous remarquons que parmi les configurations simulées, certaines occupent mieux l'espace que d'autres. Avec un nombre de tours égal à une fraction simple, comme $\frac{3}{8}$, (pour 135°), on a des demi-droites, ce qui n'est pas optimal pour occuper l'espace ! Quand on est trop près d'une fraction simple (comme avec 136°), les spirales occupent mal l'espace. Si la fraction a un dénominateur plus grand (comme avec 140°), la



structure en demi-droites met plus de temps à apparaître, mais finit quand même par apparaître. Il semble donc que le meilleur choix soit de prendre un nombre de tours qui ne soit pas une fraction, c'est-à-dire un nombre de tours irrationnel.

Parmi les nombres irrationnels, nous connaissons $\sqrt{2}$ et d'autres racines carrées. Simulons la croissance de tournesols avec quelques racines carrées.
Le résultat est assez étonnant, on obtient des choses très différentes selon les racines carrées : certaines occupent bien l'espace, comme $\sqrt{7}$ et $\sqrt{13}$. Avec $\sqrt{10}$ et $\sqrt{17}$ au contraire on retrouve des spirales peu efficaces pour occuper l'espace. Nous voyons 6 spirales pour $\sqrt{10}$, sans doute parce que $\sqrt{10}$ est très bien approché par une fraction en sixièmes, et 8 spirales pour $\sqrt{17}$, parce que $\sqrt{17}$ est sans doute très bien approché par une fraction en huitièmes.

Examinons les développements en fractions continues de ces différentes racines carrées.

Le principe du développement en fractions continues d'un nombre irrationnel est le même que pour un nombre rationnel : on garde la partie entière, et on inverse la partie décimale. On recommence, et ce développement ne s'arrête jamais parce que le nombre est irrationnel.

$$\sqrt{7} = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{\dots}}}}} \qquad \sqrt{10} = 3 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{\dots}}}}} \qquad \sqrt{13} = 3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{6 + \dots}}}}} \qquad \sqrt{17} = 4 + \cfrac{1}{8 + \cfrac{1}{8 + \cfrac{1}{8 + \cfrac{1}{8 + \cfrac{1}{\dots}}}}}$$

On retrouve avec les premières troncatures de $\sqrt{10}$ et $\sqrt{17}$, que $\sqrt{10}$ est approché par $\dfrac{19}{6}$ et $\sqrt{17}$ par $\dfrac{33}{8}$.
Mais pourquoi $\sqrt{10}$ et $\sqrt{17}$ sont-ils approchés de près, et pas $\sqrt{7}$ et $\sqrt{13}$ ? Qu'observe-t-on de différent dans leur décomposition ?

$\sqrt{7}$ et $\sqrt{13}$ ont beaucoup de « 1 » dans leur décomposition contrairement à $\sqrt{10}$ et $\sqrt{17}$. Que se passe-t-il lorsque l'on néglige la partie en gris clair ?
Avec $\sqrt{10}$, on néglige quelque chose d'environ égal à $\dfrac{1}{6}$ par rapport à 6. Avec $\sqrt{7}$, ce que l'on néglige est plus grand (entre $\dfrac{1}{2}$ et 1), et on le néglige par rapport à 1. On fait donc une erreur plus importante. La valeur approchée est moins bonne.

Comment alors créer le nombre qui se laisse le moins bien approcher par des fractions simples ?

D'après ce qui précède, pour avoir un nombre qui s'approche mal par des fractions simples, on ne met que des « 1 » dans sa décomposition en fractions :

$$\varphi = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \dots}}}}$$

$$\varphi = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \dots}}}} \qquad \varphi = \frac{1}{1 + \varphi} \qquad \varphi + \varphi^2 = 1 \qquad \boxed{\varphi = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \approx 0{,}618}$$

Revenons à notre simulateur de tournesols : en traduisant la portion de tours 0,618... en degrés, cela fait environ 222.5°. Observons la formation d'un tournesol avec un angle de 222.5°, 100 primordia et une période d'apprition de 250.

Le simulateur nous propose un « angle d'or », égal à 137.5°. C'est le complémentaire à 360° de 222.5° : tourner de 137.5° dans un sens revient à tourner de 222.5° dans l'autre.

Comparons la simulation et la réalité. La simulation donne un résultat très proche de la réalité, ce qui valide d'une certaine façon le modèle de croissance, et en particulier l'hypothèse de Hofmeister d'occupation maximale de l'espace.

> Lors de la croissance des plantes en spirale, l'angle entre 2 primordia successifs est égal à l'angle d'or, soit environ 222.5° dans un sens, ou environ 137.5° dans l'autre sens.
> Ce nombre est obtenu en multipliant la portion de tour $\varphi = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ par 360.
> Et ce nombre $\varphi$, petit frère du nombre d'or, a été trouvé en cherchant le nombre réel qui se laisse le moins vite approcher par des fractions « simples ».

Il nous reste à expliquer pourquoi cela entraîne que le nombre de spirales observées est toujours un élément de la suite de Fibonacci.

## B - De l'angle d'or à la suite de Fibonacci

On peut voir sur le tournesol construit avec l'angle d'or un ensemble de 13 spirales ; un autre ensemble de 21 spirales ; également 34 spirales « plus droites ». D'après ce que nous avons vu, c'est parce que l'angle d'or doit être approché par des fractions de dénominateur 8 13, 21, etc ... Regardons d'un peu plus près :

$$R_1 = \frac{1}{1+1} \qquad \boxed{R_1 = \frac{1}{2}}$$

$$\boxed{\varphi = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \dots}}}}$$

$$R_2 = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1+1}} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2}} = \cfrac{1}{\cfrac{2+1}{2}} = \frac{2}{2+1} = \frac{2}{3}$$

$$R_3 = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1+1}}} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{2}{3}} = \cfrac{1}{\cfrac{3+2}{3}} = \frac{3}{3+2} = \frac{3}{5}$$

## C - Des mathématiques ? Oui !

Nous avons répondu à toutes nos questions :

- POURQUOI DES SPIRALES APPARAISSENT-ELLES LORS DE LA CROISSANCE DES PLANTES ?
  *C'est l'indice que l'angle de divergence est proche d'une fraction rationnelle « simple ».*
- POURQUOI LE NOMBRE DE SPIRALES EST-IL UN ÉLÉMENT DE LA SUITE DE FIBONACCI ?
  *Parce que la suite de Fibonacci se retrouve dans les fractions approchant l'angle d'or.*
- COMMENT CHOISIR L'ANGLE DE DIVERGENCE POUR OCCUPER AU MAXIMUM L'ESPACE ?
  *C'est l'angle d'or, égal à* $\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} \times 360° \approx 222.5°$

Il reste la question posée à l'exposé : « Les plantes font-elles des mathématiques ? » Ce qui est certain, c'est que nous, pour comprendre l'organisation des plantes en spirales, nous en avons fait !
On peut bien sûr se contenter d'observer et d'admirer les plantes, et il n'est nul besoin de mathématiques pour cela. Mais pour arriver à expliquer ce que l'on voit, les botanistes ont d'abord établi des modèles de croissance des plantes. Puis, à partir de ces modèles, on a pu grâce aux mathématiques expliquer ces observations, les prédire, les simuler, ce qui, d'une certaine façon, valide les hypothèses du modèle proposé en botanique.
Il reste pour les botanistes à comprendre pourquoi les plantes se comportent de cette façon, et là, plusieurs hypothèses sont avancées : les raisons peuvent être d'ordre chimique (les primordia se repousseraient entre eux), ou bien physique (l'occupation maximale de l'espace serait liée à des contraintes mécaniques dues à la déformation de l'apex)



Ces recherches sur l'arrangement des feuilles, domaine que l'on appelle la phyllotaxie, ont véritablement commencé au XIXe siècle, et se poursuivent encore aujourd'hui. Elles concernent aussi bien des botanistes que des mathématiciens, des chimistes et des physiciens. En trouvant des réponses en phyllotaxie, les chercheurs trouvent aussi des réponses dans d'autres domaines, comme les réseaux cristallins (réseaux de Bravais), l'étude de systèmes dynamiques . . .

Pour terminer, voici quelques lectures intéressantes pour la compréhension de la croissance des plantes, et de leur lien avec les mathématiques :

- ✿ Accromath, volume 3-2, Spirales végétales, de Christaine Rousseau.
  Revue québecquoise disponible en ligne : http://accromath.uqam.ca/
- ✿ TPE avec simulateur de tournesols. http://tpe.tournesol.free.fr/tournesol.htm
- ✿ La Recherche, janvier 1993, La physique des spirales végétales, de Stéphane Douady et Yves Couder.
- ✿ Site d'un Collège, dans le Massachusetts (des articles récents de recherche, et de magnifiques photos du jardin botanique) http://www.math.smith.edu/phyllo/